#### שאלה 1:

**סעיף א':** נסמן .

יהי בסיס של , נסמן .

נניח בשלילה כי קיים כך שמתקיים .

הוא ק"ל של איברי הבסיס, כלומר , לכן:

לכן ומכאן סתירה.

לכן לכל מתקיים , לכן נסמן ונקבל כי לכל מתקיים , לכן נילפוטנטית מסדר .

**סעיף ב':**

מתקיים , נסמן .

*הוא תת-מרחב -אינווריאנטי, כי לכל מתקיים , כי וכן .*

*נתון , כלומר קיים כך שמתקיים .*

*נניח כי נילפוטנטית, אז קיים ערך* ***מינימלי*** *כך שמתקיים .*

נניח כי ניתנת ללכסון, כלומר קיים בסיס בו אלכסונית.

מתקיים , לכן לכל , ומכאן לכל , כלומר , לכן , לכן , כלומר ומכאן סתירה.

לכן לא ייתכן כי נילפוטנטית וגם ניתנת ללכסון.

נניח בשלילה כי **אינה** נילפוטנטית וגם **אינה** ניתנת ללכסון.

אינה נילפוטנטית, לכן קיים ע"ע , ולו מתאים ו"ע כך שמתקיים .

כלומר , לכן .

נניח בשלילה כי קיים ו"ע המתאים לע"ע , אזי , ומכאן סתירה, כי הם ת"ל, לכן .

נניח בשלילה כי קיים ע"ע נוסף , לו מתאים ו"ע כך שמתקיים .

כלומר , כלומר ת"ל ומכאן סתירה, כי ו"ע של ע"ע שונים הם בת"ל.

לכן לע"ע 0 יש ו"ע שונים, כלומר עבורו מתקיים .

לכן עבור הע"ע מתקיים , כי סכום הריבויים האלגבריים הוא , לכן מתקיים .

*קיבלנו כי לכל ע"ע של מתקיים , לכן ע"פ משפט לכסינה.*

#### שאלה 2:

נתון ט"ל נילפוטנטית מסדר , כלומר לכל מתקיים .

**סעיף א':** מהגדרת מתקיים כי לכל מתקיים .

נניח בשלילה כי קיים סדר כך שלכל מתקיים .

לכל מתקיים כי כי מתקיים .

ע"פ ההנחה מתקיים גם . זה נכון לכל , לכן קיבלנו כי נילפוטנטית מסדר ומכאן סתירה לנתון, לכן הוא סדר הנילפוטנטיות המינימלי של .

**סעיף ב':** מהגדרת מתקיים כי לכל קיים כך שמתקיים .

לכן לכל מתקיים , לכן ט"ל נילפוטנטית מסדר .

נניח בשלילה כי אינו סדר הנילפוטנטיות המינימלי של , כלומר קיים כך שלכל מתקיים .

יהי , אזי נסמן .

לכן נקבל .

קיבלנו כי נילפוטנטית מסדר כאשר מתקיים , בסתירה לכך ש- נילפוטנטית מסדר .

לכן נילפוטנטית מסדר .

#### שאלה 3:

**סעיף א':** הטענה **נכונה**.  
מתקיים .

יהי אזי מתקיים .

נקבל , לכן , כלומר .

נסתכל על . מתקיים , כלומר .

אם אזי זוהי ההצגה ה**יחידה** של , כי זהו סכום ישר, לכן , לכן אינו -אינווריאנטי.

אם אזי כאשר , כלומר .

מתקיים , כלומר .

זוהי ההצגה ה**יחידה** של , כי זהו סכום ישר, לכן , לכן אינו -אינווריאנטי.

**סעיף ב':** הטענה **אינה** נכונה.

מתקיים .

יהי אזי מתקיים .

נקבל , כלומר , כלומר .

נגדיר , ומתקיים ולכן .

נראה כי תת-מרחב -אינווריאנטי:

יהי אזי ומתקיים , כלומר .

#### שאלה 4:

יהי בסיס של .

נסתכל בה"כ על הוקטור .

לכן מתקיים .

נגדיר להיות תת-מרחב ממימד שאינו מכיל את הוקטור , כלומר .

יהי , אזי , לכן , כי זהו תת-מרחב -אינווריאנטי.

כלומר מתקיים , כאשר המקדמים זהים כי זו תת-קבוצה של וההצגה בבסיס היא **יחידה**.

אם נשווה את ההצגה של תחת ותחת נקבל כי , כלומר .

זה נכון לכל , לכן נקבל , כלומר היא ט"ל סקלרית.